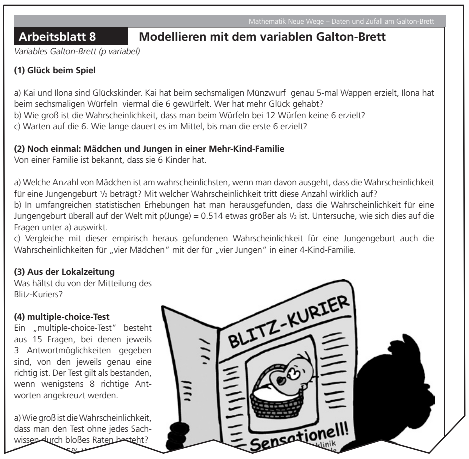
Arbeitsblätter 8-11 Tipps und Hilfen zu den einzelnen Arbeitsblättern


Mathematik Neue Wege – Daten und Zufall am Galton-Brett

Arbeitsblatt 8 **Modellieren mit dem variablen Galton-Brett**

Variables Galton-Brett (p variabel)

(1) Glück beim Spiel

a) Kai und Ilona sind Glückskinder. Kai hat beim sechsmaligen Münzwurf genau 5-mal Wappen erzielt, Ilona hat beim sechsmaligen Würfeln viermal die 6 gewürfelt. Wer hat mehr Glück gehabt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Würfeln bei 12 Würfen keine 6 erzielt?
c) Warten auf die 6. Wie lange dauert es im Mittel, bis man die erste 6 erzielt?

(2) Noch einmal: Mädchen und Jungen in einer Mehr-Kind-Familie
Von einer Familie ist bekannt, dass sie 6 Kinder hat.

a) Welche Anzahl von Mädchen ist am wahrscheinlichsten, wenn man davon ausgeht, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt $1/2$ beträgt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt diese Anzahl wirklich auf?
b) In umfangreichen statistischen Erhebungen hat man herausgefunden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt überall auf der Welt mit p(Junge) = 0.514 etwas größer als $1/2$ ist. Untersuche, wie sich dies auf die Fragen unter a) auswirkt.
c) Vergleiche mit dieser empirisch heraus gefundenen Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt auch die Wahrscheinlichkeiten für „vier Mädchen" mit der für „vier Jungen" in einer 4-Kind-Familie.

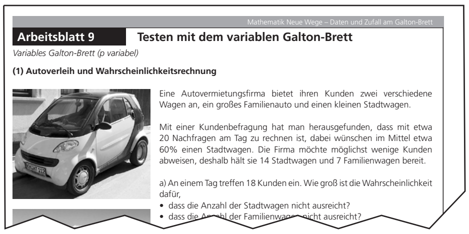
(3) Aus der Lokalzeitung
Was hältst du von der Mitteilung des Blitz-Kuriers?

(4) multiple-choice-Test
Ein „multiple-choice-Test" besteht aus 15 Fragen, bei denen jeweils 3 Antwortmöglichkeiten gegeben sind, von den jeweils genau eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn wenigstens 8 richtige Antworten angekreuzt werden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man den Test ohne jedes Sachwissen durch bloßes Raten besteht?

Arbeitsblatt 8 (Fortsetzung)

zu (3): Entscheidend ist hier nicht das genaue Ergebnis „5 Mädchen bei 22 Geburten" sondern „höchstens 5 Mädchen bei 22 Geburten".
zu (4c): Zum Modellieren mit dem Galton-Brett kommen nur solche Tests in Frage, bei denen unter den gegebenen Auswahlantworten genau eine richtig ist. Bei vielen heutigen Tests ist es so, dass auch keine oder mehrere Auswahlantworten richtig sind, die dazu passenden mathematischen Modelle sind komplexer.
zu (5): Zur Modellierung mit dem Galton-Brett muss man davon ausgehen, dass die Zusammensetzung der Klasse bzgl. des Merkmals „farbenblind" zufällig erfolgt.


Mathematik Neue Wege – Daten und Zufall am Galton-Brett

Arbeitsblatt 9 **Testen mit dem variablen Galton-Brett**

Variables Galton-Brett (p variabel)

(1) Autoverleih und Wahrscheinlichkeitsrechnung

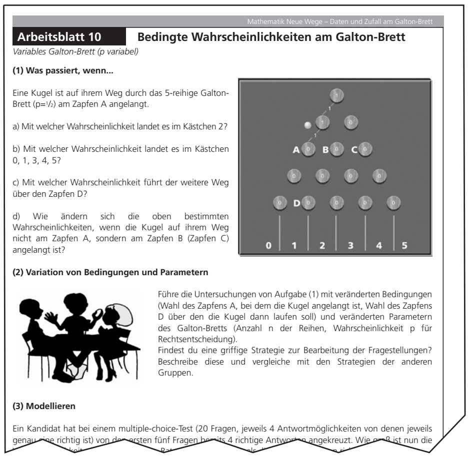
Eine Autovermietungsfirma bietet ihren Kunden zwei verschiedene Wagen an, ein großes Familienauto und einen kleinen Stadtwagen.

Mit einer Kundenbefragung hat man herausgefunden, dass mit etwa 20 Nachfragen am Tag zu rechnen ist, dabei wünschen im Mittel etwa 60% einen Stadtwagen. Die Firma möchte möglichst wenige Kunden abweisen, deshalb hält sie 14 Stadtwagen und 7 Familienwagen bereit.

a) An einem Tag treffen 18 Kunden ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
- dass die Anzahl der Stadtwagen nicht ausreicht?
- dass die Anzahl der Familienwagen nicht ausreicht?

Arbeitsblatt 9
Testen mit dem variablen Galton-Brett

zu (1): Zur Modellierung mit dem Galton-Brett muss man davon ausgehen, dass die Wahl des Autotyps bei den eintreffenden Kunden zufällig (nach der im Mittel festgestellten Wahrscheinlichkeit) erfolgt.


Mathematik Neue Wege – Daten und Zufall am Galton-Brett

Arbeitsblatt 10 **Bedingte Wahrscheinlichkeiten am Galton-Brett**

Variables Galton-Brett (p variabel)

(1) Was passiert, wenn...

Eine Kugel ist auf ihrem Weg durch das 5-reihige Galton-Brett ($p=1/2$) am Zapfen A angelangt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet es im Kästchen 2?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet es im Kästchen 0, 1, 3, 4, 5?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt der weitere Weg über den Zapfen D?

d) Wie ändern sich die oben bestimmten Wahrscheinlichkeiten, wenn die Kugel auf ihrem Weg nicht am Zapfen A, sondern am Zapfen B (Zapfen C) angelangt ist?

(2) Variation von Bedingungen und Parametern

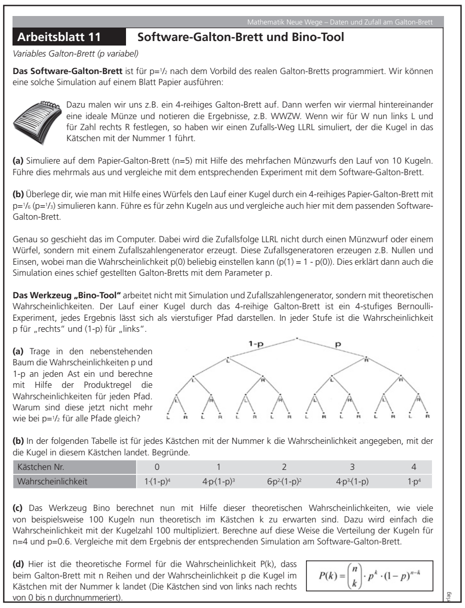
Führe die Untersuchungen von Aufgabe (1) mit veränderten Bedingungen (Wahl des Zapfens A, bei dem die Kugel angelangt ist, Wahl des Zapfens D über den die Kugel dann laufen soll) und veränderten Parametern des Galton-Bretts (Anzahl n der Reihen, Wahrscheinlichkeit p für Rechtsentscheidung).
Findest du eine griffige Strategie zur Bearbeitung der Fragestellungen? Beschreibe diese und vergleiche mit den Strategien der anderen Gruppen.

(3) Modellieren

Ein Kandidat hat bei einem multiple-choice-Test (20 Fragen, jeweils 4 Antwortmöglichkeiten von denen jeweils genau eine richtig ist) von den ersten fünf Fragen bereits 4 richtige Antworten angekreuzt. Wie groß ist nun die

Arbeitsblatt 10
Bedingte Wahrscheinlichkeiten am Galton-Brett

zu (1),(2),(3): Die Simulation am Software-Galton-Brett zeigt u.a., wie oft jeder einzelne Zapfen beim Durchlauf der vielen Kugeln getroffen wurde. Mit der Bedingung, dass ein bestimmter Zapfen getroffen wird, entstehen so neue (kleinere) Galton-Bretter im Galton-Brett, die bei der Beantwortung der Fragen hilfreich sind.
zu (4b): Die Entscheidungen L oder R am ersten Zapfen liefern unterschiedliche Anteile zur Wahrscheinlichkeit P(„1"). Mit einem passenden Verhältnis lässt sich so die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen.
zu (4c): Hier ist die Textausgabe (Protokoll der einzelnen Pfade) hilfreich.


Mathematik Neue Wege – Daten und Zufall am Galton-Brett

Arbeitsblatt 11 **Software-Galton-Brett und Bino-Tool**

Variables Galton-Brett (p variabel)

Das Software-Galton-Brett ist für $p=1/2$ nach dem Vorbild des realen Galton-Bretts programmiert. Wir können eine solche Simulation auf einem Blatt Papier ausführen:

Dazu malen wir uns z.B. ein 4-reihiges Galton-Brett auf. Dann werfen wir viermal hintereinander eine ideale Münze und notieren die Ergebnisse, z.B. WWZW. Wenn wir für W nun links L und für Zahl rechts R festlegen, so haben wir einen Zufalls-Weg LLRL simuliert, der die Kugel in das Kätschen mit der Nummer 1 führt.

(a) Simuliere auf dem Papier-Galton-Brett (n=5) mit Hilfe des mehrfachen Münzwurfs den Lauf von 10 Kugeln. Führe dies mehrmals aus und vergleiche mit dem entsprechenden Experiment mit dem Software-Galton-Brett.

(b) Überlege dir, wie man mit Hilfe eines Würfels den Lauf einer Kugel durch ein 4-reihiges Papier-Galton-Brett mit $p=1/6$ ($p=1/3$) simulieren kann. Führe es für zehn Kugeln aus und vergleiche auch hier mit dem passenden Software-Galton-Brett.

Genau so geschieht das im Computer. Dabei wird die Zufallsfolge LLRL nicht durch einen Münzwurf oder einem Würfel, sondern mit einem Zufallszahlengenerator erzeugt. Diese Zufallsgeneratoren erzeugen z.B. Nullen und Einsen, wobei man die Wahrscheinlichkeit p(0) beliebig einstellen kann (p(1) = 1 - p(0)). Dies erklärt dann auch die Simulation eines schief gestellten Galton-Bretts mit dem Parameter p.

Das Werkzeug „Bino-Tool" arbeitet nicht mit Simulation und Zufallszahlengenerator, sondern mit theoretischen Wahrscheinlichkeiten. Der Lauf einer Kugel durch das 4-reihige Galton-Brett ist ein 4-stufiges Bernoulli-Experiment, jedes Ergebnis lässt sich als vierstufiger Pfad darstellen. In jeder Stufe ist die Wahrscheinlichkeit p für „rechts" und (1-p) für „links".

(a) Trage in den nebenstehenden Baum die Wahrscheinlichkeiten p und 1-p an jeden Ast ein und berechne mit Hilfe der Produktregel die Wahrscheinlichkeiten für jeden Pfad. Warum sind diese jetzt nicht mehr wie bei $p=1/2$ für alle Pfade gleich?

(b) In der folgenden Tabelle ist für jedes Kästchen mit der Nummer k die Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der die Kugel in diesem Kästchen landet. Begründe.

Kästchen Nr.	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$1\cdot(1-p)^4$	$4\cdot p\cdot(1-p)^3$	$6\cdot p^2\cdot(1-p)^2$	$4\cdot p^3\cdot(1-p)$	$1\cdot p^4$

(c) Das Werkzeug Bino berechnet nun mit Hilfe dieser theoretischen Wahrscheinlichkeiten, wie viele von beispielsweise 100 Kugeln nun theoretisch im Kästchen k zu erwarten sind. Dazu wird einfach die Wahrscheinlichkeit mit der Kugelzahl 100 multipliziert. Berechne auf diese Weise die Verteilung der Kugeln für n=4 und p=0.6. Vergleiche mit dem Ergebnis der entsprechenden Simulation am Software-Galton-Brett.

(d) Hier ist die theoretische Formel für die Wahrscheinlichkeit P(k), dass beim Galton-Brett mit n Reihen und der Wahrscheinlichkeit p die Kugel im Kästchen mit der Nummer k landet (Die Kästchen sind von links nach rechts von 0 bis n durchnummeriert).

$$P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Arbeitsblatt 11
Software-Galton-Brett und Bino-Tool

zu (1): Die Bemerkungen zum Zufallszahlengenerator sind hier ganz kurz gehalten. Etwas mehr Information kannst du dem Lexikon entnehmen. Eigene Erfahrungen mit Zufallsgeneratoren kannst du mit dem Zufallszahlengenerator in der Tabellenkalkulation EXCEL oder mit dem Zufallszahlengenerator deines graphischen Taschenrechners oder dem CAS-Rechner gewinnen (Hilfe des Handbuchs oder Beratung durch den Informatik-Experten). Für weitergehende Recherchen gibt es gute Adressen im Internet (Suchwort: Zufallszahlen / Zufallszahlengenerator).
zu (2): Die Fragen sind leichter zu beantworten, wenn du Arbeitsblatt 5 durchgearbeitet hast.
zu (4d): Hilfreiche Begriffe im Lexikon: Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Binomialkoeffizient (weitere Informationen findest du auch im Handbuch deines graphischen Taschenrechners).