B. Pollok, LSW Soest

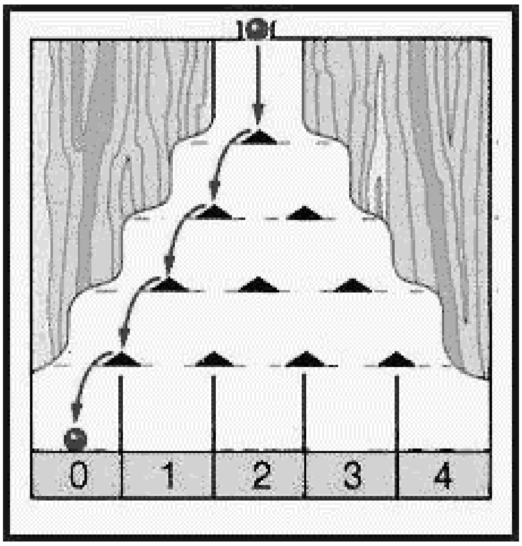
Ein schneller Zugang zu Binomialverteilungen:

Das Galton - Brett

Stochastik wurde in der Sekundarstufe II während der letzten Jahre längst nicht von allen Mathematik-Lehrer(inne)n unterrichtet. Ein häufig genannter Ablehnungsgrund war, dass die Grundlagen aus der Sek. I fehlten (wo das Thema auch nur wenig Gegenliebe findet) und somit ein großer Teil der (meist knappen) Zeit mit banalen Inhalten bei der Einführung vertan wird. Die neuen Richtlinien fordern nun im 11. Jahrgang verbindlich eine Reihe zur „Beschreibenden Statistik", der im 12./13. Jahrgang die Bereiche „Wahrscheinlichkeitsrechnung" und „Beurteilende Statistik" folgen sollen.

Einen schnellen Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet das Galton-Brett. Ein Einstieg mittels dieses Gerätes knüpft an intuitive Vorstellungen der Schüler(innen) über Wahrscheinlichkeiten an und entwickelt auf dem Wege zu binomialverteilten Zufallsgrößen quasi nebenbei die notwendigen Begriffe und Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Je nach Vorwissen der Lerngruppe können die Inhalte anhand anderer Beispiele zusätzlich geübt und vertieft werden.

Der hier geschilderte Zugang ist nicht neu und erfahrenen Stochastik-Unterrichtenden sicherlich bekannt. Bestimmt gibt es auch schon irgendwo einen Aufsatz darüber - ich weiß nur nicht wo. Dieser Beitrag soll jedenfalls Kolleg(inn)en, die diesen Ansatz noch nicht kennen, ermutigen, einen Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finden, der auf unnötigen Ballast verzichtet.



(Die Nummerierung der Töpfe von 0 bis 4 erweist sich später als günstiger als die übliche von 1 bis 5)

Am besten ist es, wenn man tatsächlich ein „richtiges" Galton-Brett zur Verfügung hat; es kommt dabei überhaupt nicht auf Präzision an. Hilfreich vor allem für Simulationen beliebiger Galton-Bretter ist auch ein entsprechendes Computerprogramm. (Geeignete Programme sind z. B. im Internet kostenlos erhältlich; im Learn-Line-Arbeitsbereich „Statistik und Explorative Datenanalyse" steht ebenfalls eines zum Download bereit.) Für den Anfang gut geeignet ist ein vierreihiges Brett, das hier als Beispiel dienen soll.

Wir lassen 100 Kugeln durch das Galton-Brett laufen und versuchen eine Vorhersage:

Wieviele Kugeln werden jeweils in den Töpfen 0 bis 4 landen?

Dazu überlegen wir zunächst:

Wie gelangt eine Kugel überhaupt in einen bestimmten Topf?

Topf 0: Es gibt nur eine Möglichkeit (einen Weg), in den Topf 0 zu gelangen - die Kugel muss auf jeder Stufe nach links rollen: *(links, links, links, links)*.

Topf 4: Bei Topf 4 ist es analog: *(rechts, rechts, rechts, rechts)*.

Topf 1: Bei allen anderen Töpfen gibt es immer mehrere Wege:

(links, links, links, rechts), aber auch *(links, links, rechts, links),*
(links, rechts, links, links) und *(rechts, links, links, links).*

Topf 3: Ähnlich ist es bei Topf 3; hier muss die Kugel dreimal nach rechts und einmal nach links fallen:

(rechts, rechts, rechts, links),
(rechts, rechts, links, rechts),
(rechts, links, rechts, rechts),
(links, rechts, rechts, rechts).

Topf 2: Nun gelingt auch Topf 2. Um dorthin zu gelangen, muss die Kugel zweimal nach links und zweimal nach rechts fallen:

(links, links, rechts, rechts),
(links, rechts, links, rechts),
(links, rechts, rechts, links),
(rechts, links, links, rechts),
(rechts, links, rechts, links),
(rechts, rechts, links, links).

Insgesamt gibt es also 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 unterschiedliche Wege durch das Galton-Brett, die aber untereinander alle gleich wahrscheinlich sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in Topf 0 landet, ist also

$P(T_0) = 1/16$. Entsprechend ist
$P(T_1) = 4/16$, (weil 4 der 16 Wege zu Topf 1 führen)
$P(T_2) = 6/16$,
$P(T_3) = 4/16$,
$P(T_4) = 1/16$.
(T_k bezeichnet das Ereignis „Eine Kugel fällt in den Topf mit der Nummer k “.)

Bezogen auf unsere Ausgangsfrage sieht man hier schon, dass die meisten Kugeln in den mittleren Topf 2 fallen sollten und die wenigsten in die beiden äußeren Töpfe 0 und 4:

In Topf 0 können 100 * 1/16 = 6,25 - also etwa 6 bis 7 Kugeln erwartet werden,
in Topf 1 etwa 25 (100 * 4/16 = 25) und
in Topf 2 etwa 37 bis 38 (100 * 6/16 = 37,5).
Für die Töpfe 3 und 4 sind es offenbar genauso viele wie für Topf 1 bzw. 0.

Allgemeine Sprechweisen:

Die Betrachtung des Laufs einer Kugel durch das Galton-Brett ist ein *Zufallsversuch*. Genaugenommen handelt es sich um einen *mehrstufigen Zufallsversuch*, da der Lauf als Abfolge mehrerer Geschehnisse aufgefasst werden kann: auf jeder Stufe fällt die Kugel entweder nach links oder nach rechts.

Wenn man sich dafür interessiert, welchen Weg eine Kugel nimmt (= *Ergebnis des Zufallsversuchs* „Weg einer Kugel im Galton-Brett“), dann ist die Menge aller möglichen Wege der *Ergebnisraum* Ω des Zufallsexperiments. Beliebige Teilmengen von Ω heißen *Ereignisse*. Besondere Ereignisse sind die *Elementar-Ereignisse*, die aus jeweils genau einem der möglichen Ergebnisse bestehen sowie das *unmögliche Ereignis* (Φ bzw. { }) und das *sichere Ereignis* Ω. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: P({ })= 0 und P(Ω) = 1.
Beim Galton-Brett von besonderem Interesse sind die oben mit T_k bezeichneten Ereignisse „Kugel fällt in Topf k“. Formal ist T_k die Menge aller Wege, die in Topf k führen, also z. B.

T_3 = { *(rechts, rechts, rechts, links), (rechts, rechts, links, rechts),*
(rechts, links, rechts, rechts), (links, rechts, rechts, rechts) }.

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind, nennt man *Laplace-Versuche*. Bei Laplace-Versuchen gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der zu E gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

Erste Verallgemeinerung der Fragestellung: Ein n-stufiges Brett

Das oben abgebildete Galton-Brett hat 4 Reihen (Stufen) und damit 5 Töpfe (0 bis 4). Bei n Stufen gibt es dann n+1 Töpfe (0 bis n). Wir fragen wieder:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel in einem bestimmten Topf landet?

Formal: Gesucht ist $P(T_k)$ für beliebiges $k = 0, 1, ..., n$.

Da alle Wege gleichwahrscheinlich sind, gilt

$$\mathbf{P(T_k)} = \frac{\textbf{Anzahl der Wege in Topf k}}{\textbf{Gesamtzahl aller Wege}}.$$

Wie bei dem obigen Beispiel untersuchen wir also wieder die Anzahl der möglichen Wege, die in die einzelnen Töpfe führen. Am einfachsten sind die äußeren Töpfe:

Topf 0: Um in Topf 0 zu landen, muss die Kugel immer nach links fallen und zwar n-mal, weil das Brett n Stufen hat. Es gibt also nur einen Weg zum Topf 0:
(links, links, ..., links) (n-mal).

Topf n: Ebenso führt nur ein Weg in den Topf n:
(rechts, rechts, ..., rechts) (n-mal).

Topf 1: Um in Topf 1 zu gelangen, muss die Kugel irgendwo einmal nach rechts und sonst immer nach links fallen. Von dieser Art gibt es n Wege:

(rechts, links, links, links, ..., links),
(links, rechts, links, links, ..., links),
(links, links,rechts, links, ..., links),
...
(links, links, links, ..., links, rechts).

Topf n-1: Analog gibt es für den vorletzten Topf ebenfalls n Wege - jeweils einmal links und (n-1)mal rechts.

Topf 2: Jetzt wird die Sache schon etwas schwieriger: Wieviele Wege führen zum Topf 2? Nun, nach den bisherigen Überlegungen ist es klar, dass auf einem solchen Weg die Kugel genau zweimal nach rechts und (n-2)mal nach links fallen muss. Wieviele solcher Wege gibt es?

Eine mögliche Überlegung ist die folgende:
Um die Schreibarbeit zu verkürzen, schreiben wir nur „L“ statt „links“ und „R“ stat „rechts“. Einem Weg in Topf 2 entspricht dann z. B. das n-Tupel (R, R, L, L, ... L), aber auch (R, L, R, L, L, ..., L), (R, L, L, R, L, ..., L) usw. Unsere Aufgabe besteht darin herauszufinden, wieviele n-Tupel es gibt, die genau 2 R’s (und damit n-2 L’s) enthalten.
Wir setzen die beiden R’s nacheinander in das Tupel hinein: Für das erste R gibt es n mögliche Plätze (Position 1 bis n). Ist das erste R gesetzt, ist ein Platz besetzt, und für das zweite R bleiben noch n-1 Plätze übrig. Da das so ist - egal wohin man das erste R gesetzt hat, gibt es für die beiden R’s also insgesamt $n \cdot (n-1)$ Setzmöglichkeiten. Die restlichen Plätze werden mit L’s aufgefüllt.
Der/die aufmerksame Leser/in wird sicher gemerkt haben, dass dieses noch nicht das gewünschte Endergebnis sein kann, denn auf diese Art werden alle Wege doppelt gezählt: z. B. gehören (R_1, R_2, L, L, ..., L) und (R_2, R_1, L, L, ..., L) zu demselben Weg, da es auf die Reihenfolge der R’s nicht ankommt.
Damit ist klar: Es gibt $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Wege in den Topf 2.

Topf n-2: Wegen der Symmetrie des Brettes ist die Anzahl der Wege in Topf n-2 ebenfalls $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$; bei der Argumentation müssen nur die R’s und die L’s vertauscht werden.

Topf k: Jetzt sind wir gut gerüstet für die Frage nach der Anzahl der Wege in einen beliebigen Topf k. Die gesuchte Anzahl ist (wie oben bei k=2) identisch mit der Anzahl der Möglichkeiten für das Setzen von k R’s in einem n-Tupel aus lauter R’s und L’s.

Das erste R wird gesetzt: Dafür gibt es wieder n mögliche Plätze - noch sind alle frei. Für das zweite R gibt es nur noch n-1 freie Plätze, für das dritte R n-2 Plätze, dann n-3, n-4, ... usw., bis für das letze (k-te) R nur noch $n-(k-1)=n-k+1$ Plätze übrig sind. Insgesamt gibt es also

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Setzmöglichkeiten für die R’s. Da es auf die Reihenfolge der R’s wieder nicht ankommt, werden auf diese Weise - wie oben bei Topf 2 erläutert - alle Wege mehrfach gezählt, diesmal allerdings nicht nur doppelt wie bei k=2.

Wir machen uns dieses am Beispiel des Tupels klar, das die R's alle am Anfang hat: (R, R, R, ..., R, L, L, ..., L) (k R's und n-k L's).
Wenn man die R's in ihrer Setz-Reihenfolge nummeriert, könnte dieses Tupel entstanden sein durch (R_1, R_2, R_3, ..., R_k, L, L, ... L), aber auch durch (R_2, R_1, R_3, ..., R_k, L, L, ... L). Eine ähnliche Überlegung wie oben liefert die Anzahl aller möglichen Anordnungen der R_i :

> Es werden jetzt die R_i der Reihe nach auf die ersten k Plätze verteilt. Für R_1 hat man die freie Wahl: k Möglichkeiten. Für R_2 bleiben noch k-1 Plätze, danach für R_3 noch k-2 Plätze usw. bis hin zu R_k - dafür ist nur noch ein Platz frei. Insgesamt gibt es also k·(k-1)·(k-2)·...·2 ·1 Möglichkeiten für die Anordnung der R_i.

Für diesen Ausdruck wird abkürzend das Symbol k! („k Fakultät") verwendet:
$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ für $k > 0$.
Außerdem ist $0! = 1$ festgesetzt worden.

Merke: Für die Anordnung von k Objekten auf k Plätzen gibt es k! mögliche Reihenfolgen.

Nach diesem kleinen Exkurs ist klar, dass immer k! der n · (n-1) · (n-2) · ... · (n-k+1) Setzmöglichkeiten den selben Weg liefern. Damit gibt es insgesamt n · (n-1) · (n-2) · ... · (n-k+1) / k! mögliche Wege in einen beliebigen Topf k.

Durch Erweitern mit (n-k)! lässt sich dieser Ausdruck umschreiben:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Auch für diesen Ausdruck wird ein abkürzendes Symbol verwendet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Der Ausdruck wird „**n über k**"gesprochen und heißt „**Binomialkoeffizient**".

Merke: Für das Setzen von k Objekten auf n Plätzen ($n \geq k$) ***ohne*** *Berücksichtigung der Reihenfolge* gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
Mit *Berücksichtigung der Reihenfolge* sind es
$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Zurück zum Galton-Brett: Es gibt also $\binom{n}{k}$ Wege in den Topf k.

Zur vollständigen Klärung der Ausgangsfrage nach der Wahrscheinlichkeit P(Topf=k) müssen wir noch alle $\binom{n}{k}$ für k = 0...n aufaddieren, um die Gesamtzahl aller möglichen Wege durch das Galton-Brett zu erhalten.

Zunächst suchen wir nach einer Idee für diese Summe und rechne sie für die ersten n’s einfach mal aus:

n = 1: $\binom{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}+\binom{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}=\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{2}$

n = 2: $\binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}}+\binom{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}+\binom{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}=\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{1}=\mathbf{4}$

n = 3: $\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}+\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}+\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}+\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}=\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{1}=\mathbf{8}$

n = 4: $\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{0}}+\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{1}}+\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}+\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}+\mathbf{4}+\mathbf{6}+\mathbf{4}+\mathbf{1}=\mathbf{16}$

usw.

Aufgabe: Berechne die Summe $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ für n = 5 *ausführlich* durch Ausrechnen der einzelnen Summanden.

Die Ergebnisse legen die Vermutung nahe, dass die Summe immer 2^n ist. Ein Beweis dieser Vermutung würde hier einen zu großen Aufwand erfordern, deshalb „glauben“ wir sie zunächst und halten als Ergebnis fest:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem n-stufigen Galton-Brett eine

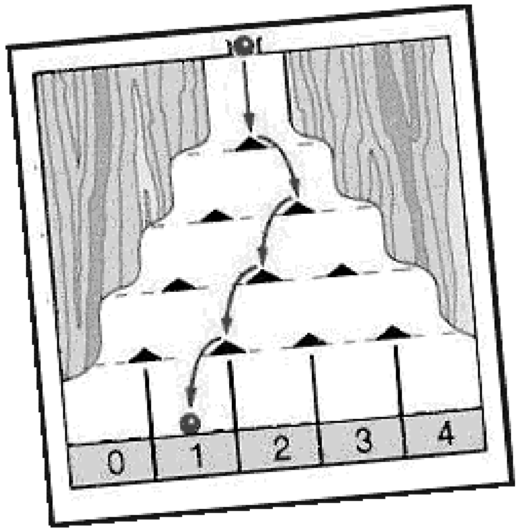
Kugel in den k-ten Topf fällt (k = 0...n) ist $\mathbf{P(T_k)}=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$.

Bei unserem ersten Beispielbrett war n = 4. Wer Lust hat, kann die alten Ergebnisse ja mal mit den Ergebnissen vergleichen, die eine Anwendung der Formel liefert.

Skeptiker, die sich mit dem „Augenschein“ für die Summe 2^n der Binomialkoeffizienten (s. o.) nicht zufrieden geben, seien auf den nächsten Teil vertröstet. Unser jetziges Resultat wird sich als Spezialfall der nächsten Verallgemeinerungsstufe erweisen und dadurch auch formal korrekt bewiesen sein.

Zweite Verallgemeinerung der Fragestellung: Unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten

Bei unseren bisherigen Überlegungen haben wir implizit immer vorausgesetzt, dass das Galton-Brett völlig symmetrisch ist, d.h. wir sind davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Kugel an einer Abzweigung nach links oder nach rechts fällt, gleich - also beide ½ sind. Wir geben diese Bedingung nun auf und betrachten ein n-stufiges Galton-Brett, das auch „schief" stehen kann. Damit verändern sich die Wahrscheinlichkeiten für einen Fall nach links oder nach rechts, je nach Neigung des Brettes.



Als abkürzende Bezeichnungen benutzen wir p für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel an einer Ablenkstelle nach rechts fällt, und q für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel an einer Ablenkstelle nach links fällt, oder kürzer:

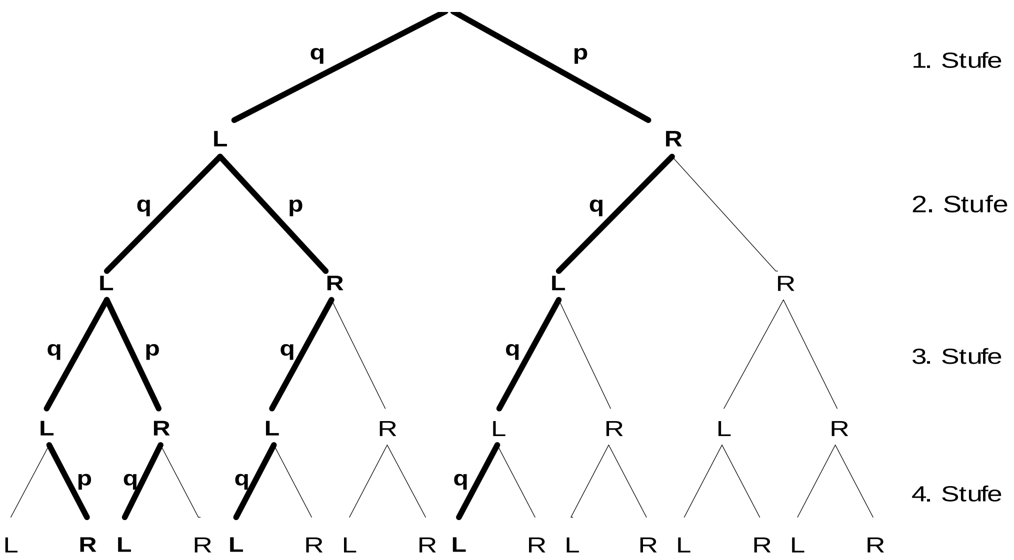
p = P(rechts) und **q = P(links)**.

Wichtig ist, dass p und q für alle Ablenkstellen des Brettes unverändert bleiben. Da es nur die beiden Möglichkeiten „rechts" oder „links" gibt, gilt p+q=1 bzw. q=1-p.

Wir stellen wieder die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel in einen bestimmten Topf k fällt:

$$\mathbf{P\ (T_k) = ?}$$

Wir betrachten zunächst wieder das alte Beispielbrett, diesmal allerdings „schief aufgehängt" (siehe Bild). (Wer mit den allgemeinen Wahrscheinlichkeiten p und q Schwierigkeiten hat, kann sich z. B. p = 1/3 und q = 2/3 vorstellen.) Wie groß ist jetzt z. B. P (T_1) ? Wir untersuchen dazu das *Baumdiagramm*, das die Möglichkeiten der Kugel auf jeder Stufe des Galton-Brettes zeigt:



Dieses Diagramm darf nicht mit dem eigentlichen Brett durcheinander gebracht werden; man mache sich genau die Unterschiede klar! Wichtig ist es auch zu verstehen, dass jeder Pfad im Diagramm umkehrbar eindeutig einem Weg auf dem Galton-Brett und damit einem Ergebnis unseres Ergebnisraumes entspricht.

Zu dem Ereignis T_1 gehören die fett markierten Pfade im Baum. Jeder dieser Pfade enthält genau ein Stück mit der Wahrscheinlichkeit p und drei Stücke mit der Wahrscheinlichkeit q, hat also insgesamt die Wahrscheinlichkeit $p^1 \cdot q^3$.

Pfadmultiplikationsregel:
Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

Da es vier Pfade mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit sind, gilt

$$\mathbf{P\,(T_1) = 4 \cdot p^1 \cdot q^3}.$$

Pfadadditionsregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die im Baumdiagramm zu diesem Ereignis gehören.

Entsprechend können nun die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Töpfe berechnet werden:

$$\mathbf{P\,(T_0) = 1 \cdot p^0 \cdot q^4,\ \ P\,(T_2) = 6 \cdot p^2 \cdot q^2,\ \ P\,(T_3) = 4 \cdot p^3 \cdot q^1,\ \ P\,(T_4) = 1 \cdot p^4 \cdot q^0.}$$

Auch der allgemeine Fall ist nun klar:
Bei einem Galton-Brett mit n Stufen haben alle Pfade im zugehörigen Baumdiagramm die Länge n. Ein Baumpfad, der zum Ereignis T_k (d. h. zu einem Weg auf dem Brett in Topf k) gehört, enthält genau k Abschnitte mit der Wahrscheinlichkeit p (Fall nach rechts) und n-k Abschnitte mit der Wahrscheinlichkeit q (Fall nach links). Die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen solchen Pfade ist also $p^k \cdot q^{n-k}$ (gemäß Pfadmultiplikationsregel).

Außerdem ist die *Anzahl* der zu T_k gehörigen Pfade (die ja den Wegen zum Topf k entsprechen) unverändert $\binom{n}{k}$, wie die Betrachtungen bei dem symmetrischen Brett mit $p=q=½$ gezeigt haben (s. o.). Aus der Pfadadditionsregel folgt somit insgesamt:

$$\mathbf{P(T_k)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p^k} \cdot \mathbf{q^{n-k}}.$$

Jetzt kann auch die Vermutung von Seite 6 bewiesen werden:

Im Fall p = q = ½ ist $\mathbf{p^k} \cdot \mathbf{q^{n-k}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{k}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n-k}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$.

Umformulierung der Ergebnisse

Durch eine einfache Umformulierung der Ereignisse T_k wird der Lauf einer Kugel im Galton-Brett als *n-stufiger Bernoulli-Versuch* (= Bernoulli-Kette) interpretiert:

1. Auf jeder Stufe hat die Kugel *genau zwei Möglichkeiten*: Sie kann nach rechts oder nach links fallen. Bei einem Bernoulli-Versuch heißen die beiden Möglichkeiten allgemein *Erfolg* oder *Misserfolg*, manchmal auch *Treffer* oder *Niete*. Was als Erfolg/Treffer betrachtet wird, ist hier eine Sache der Festsetzung. Wir definieren:

   Erfolg := „Kugel fällt nach rechts“; Misserfolg := „Kugel fällt nach links“.

2. Auf jeder Stufe bleiben die Wahrscheinlichkeiten p (= Erfolgswahrscheinlichkeit) und q (= Misserfolgeswahrscheinlichkeit) unverändert.
   Es gilt auch immer $p + q = 1$ und damit $q = 1 - p$.

Untersucht wird nun die *Zufallsgröße* (oder auch *Zufallsvariable*)

X : Anzahl der Erfolge bei einem n-Stufigen Bernoulli-Versuch.

Mit **X = k** wird das Ereignis bezeichnet, dass es bei dem n-stufigen Versuch k Erfolge gibt.

Bei unserem Galton-Brett entspricht X = k dem Ereignis T_k : Die Kugel rollt genau dann in Topf k, wenn sie k-mal nach rechts fällt.

Durch diese Uminterpretationen erhalten wir aus der obigen Formel für T_k die

Bernoulli-Formel: $$\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}} .$$

Häufig wird diese Wahrscheinlichkeit für k Erfolge bei einem n-Stufigen Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p auch mit

$$B\,(n, p; k)$$

bezeichnet.

Aus all unseren Überlegungen ergibt sich schließlich die

Definition der Binomial-Verteilung:

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte 0, 1, 2 bis n mit der Wahrscheinlichkeit

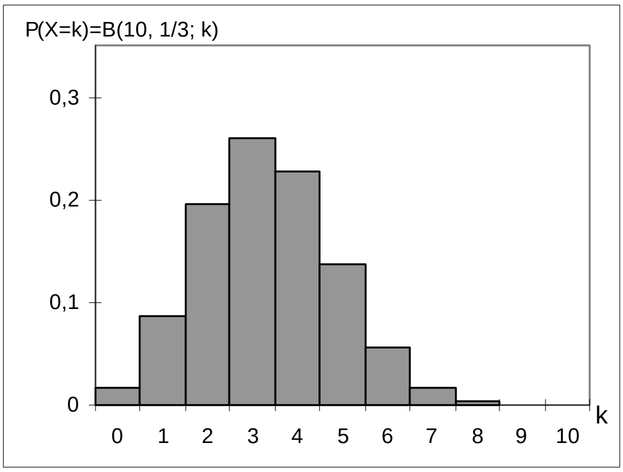
$$\mathbf{P(X = k) = B(n, p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

für alle k = 0, 1, 2, ..., n an, so heißt X *binomialverteilt mit den Parametern n und p*.
Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung (= Tabelle der Wahrscheinlichkeiten P(X=k)) heißt *Binomialverteilung mit den Parametern n und p*.

Beispiel: Binomialverteilung mit den Parametern 10 und $^1/_3$

k	B (10, 1/3; k)
0	0,0173
1	0,0867
2	0,1951
3	0,2601
4	0,2276
5	0,1366
6	0,0569
7	0,0163
8	0,0030
9	0,0003
10	0,0000(169...)

Wertetabelle (auf 4 Stellen gerundet)



Histogramm

Ausblick

Mit dieser Einführung befindet man sich sehr schnell mitten im Unterrichtsschwerpunkt „Binomialverteilungen". Das Galton-Brett bleibt vor allem als „Prototyp" für Bernoulli-Ketten in Erinnerung. Aber auch bei nachfolgenden Betrachtungen zu Erwartungswert und σ-Umgebungen kann das Brett immer wieder als aussagekräftiges Beispiel dienen. Besitzt man ein reales, möglichst mit nicht allzu großer Präzision gefertigtes Brett, so lassen sich z. B. auch Hypothesentests zu möglichen Unregelmäßigkeiten des Modells durchführen.

Bruno Pollok, Detmold 1998/99