Arbeitsblatt 11 Software-Galton-Brett und Bino-Tool

Variables Galton-Brett (p variabel)

Das Software-Galton-Brett ist für $p=1/2$ nach dem Vorbild des realen Galton-Bretts programmiert. Wir können eine solche Simulation auf einem Blatt Papier ausführen:

Dazu malen wir uns z.B. ein 4-reihiges Galton-Brett auf. Dann werfen wir viermal hintereinander eine ideale Münze und notieren die Ergebnisse, z.B. WWZW. Wenn wir für W nun links L und für Zahl rechts R festlegen, so haben wir einen Zufalls-Weg LLRL simuliert, der die Kugel in das Kätschen mit der Nummer 1 führt.

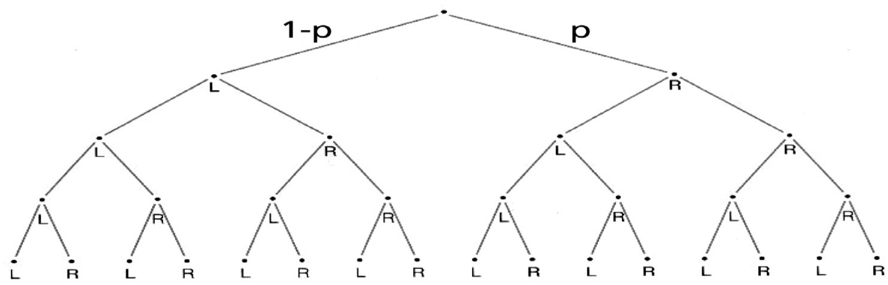
(a) Simuliere auf dem Papier-Galton-Brett (n=5) mit Hilfe des mehrfachen Münzwurfs den Lauf von 10 Kugeln. Führe dies mehrmals aus und vergleiche mit dem entsprechenden Experiment mit dem Software-Galton-Brett.

(b) Überlege dir, wie man mit Hilfe eines Würfels den Lauf einer Kugel durch ein 4-reihiges Papier-Galton-Brett mit $p=1/6$ ($p=1/3$) simulieren kann. Führe es für zehn Kugeln aus und vergleiche auch hier mit dem passenden Software-Galton-Brett.

Genau so geschieht das im Computer. Dabei wird die Zufallsfolge LLRL nicht durch einen Münzwurf oder einem Würfel, sondern mit einem Zufallszahlengenerator erzeugt. Diese Zufallsgeneratoren erzeugen z.B. Nullen und Einsen, wobei man die Wahrscheinlichkeit p(0) beliebig einstellen kann (p(1) = 1 - p(0)). Dies erklärt dann auch die Simulation eines schief gestellten Galton-Bretts mit dem Parameter p.

Das Werkzeug „Bino-Tool" arbeitet nicht mit Simulation und Zufallszahlengenerator, sondern mit theoretischen Wahrscheinlichkeiten. Der Lauf einer Kugel durch das 4-reihige Galton-Brett ist ein 4-stufiges Bernoulli-Experiment, jedes Ergebnis lässt sich als vierstufiger Pfad darstellen. In jeder Stufe ist die Wahrscheinlichkeit p für „rechts" und (1-p) für „links".

(a) Trage in den nebenstehenden Baum die Wahrscheinlichkeiten p und 1-p an jeden Ast ein und berechne mit Hilfe der Produktregel die Wahrscheinlichkeiten für jeden Pfad. Warum sind diese jetzt nicht mehr wie bei $p=1/2$ für alle Pfade gleich?



(b) In der folgenden Tabelle ist für jedes Kästchen mit der Nummer k die Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der die Kugel in diesem Kästchen landet. Begründe.

Kästchen Nr.	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$1 \cdot (1-p)^4$	$4 \cdot p \cdot (1-p)^3$	$6 p^2 \cdot (1-p)^2$	$4 \cdot p^3 \cdot (1-p)$	$1 \cdot p^4$

(c) Das Werkzeug Bino berechnet nun mit Hilfe dieser theoretischen Wahrscheinlichkeiten, wie viele von beispielsweise 100 Kugeln nun theoretisch im Kästchen k zu erwarten sind. Dazu wird einfach die Wahrscheinlichkeit mit der Kugelzahl 100 multipliziert. Berechne auf diese Weise die Verteilung der Kugeln für n=4 und p=0.6. Vergleiche mit dem Ergebnis der entsprechenden Simulation am Software-Galton-Brett.

(d) Hier ist die theoretische Formel für die Wahrscheinlichkeit P(k), dass beim Galton-Brett mit n Reihen und der Wahrscheinlichkeit p die Kugel im Kästchen mit der Nummer k landet (Die Kästchen sind von links nach rechts von 0 bis n durchnummeriert).

$$\boxed{P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Vielleicht kannst du diese mit Hilfe der Überlegungen aus a) bis c) begründen, evtl. ist die Hilfe des Lexikons oder eines Wahrscheinlichkeitsexperten notwendig. Auf jeden Fall kannst du damit die theoretisch zu erwartende Anzahl berechnen, die von 1000 Kugeln bei n=10 und p=0.7 im Kästchen mit der Nummer 4 landen und diese mit einem Simulationsergebnis am Software-Galton-Brett vergleichen.