Lehrer Lämpel

hat wegen eines überraschenden Frühlingseinbruchs leider keine Zeit, die Stochastik-Klassenarbeiten ausführlich zu korrigieren. Letztes Jahr hat er in einer ähnlichen Lage die Noten einfach mit einem schlichten Würfel ausgewürfelt – aber leider gab es dabei ungefähr ein Drittel Fünfen und Sechsen und entsprechend viel Ärger mit der Klasse, den Eltern und mit dem Schulleiter. Er vergibt daher diesmal die Notenpunkte wie folgt:

Für jede Arbeit wirft er vier (ideale) Münzen, zählt, wie oft dabei „Wappen“ gefallen ist, addiert 1 und notiert dieses Ergebnis als Note. Damit kommen höchstens die Noten 1, 2, 3, 4 und 5 vor.

Wie wird wohl die Klassenarbeit ausfallen? Wird es diesmal weniger Ärger geben?

Erwartungsmuster für den Notenspiegel

Anzahl Wappen → Note →	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5
Gemeinsam erwarteter Notenspiegel					
Prozentualer Anteil					

Lehrer Lämpel bei der Korrektur

Wurf Nr.	Wappen (W) Zahl (Z)				Note
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					
14.					
15.					

Wurf Nr.	Wappen (W) Zahl (Z)				Note
16.					
17.					
18.					
19.					
20.					
21.					
22.					
23.					
24.					
25.					
26.					
27.					
28.					
29.					
30.					

Experimentelles Ergebnis

Anzahl Wappen → Note →	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5
Summe					
Gesamt-Notenspiegel (prozentualer Anteil)					
Prognose für die nächste Klassenarbeit					

Nach: Herget, Wilfried: Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall ... – In: *mathematik lehren*, Heft 85 (1997), S. 4–8

Lösungshinweise zu „Lehrer Lämpel“

Die überschaubare, aber nicht zu einfache Ausgangssituation ist ersichtlich konstruiert, sie weckt dennoch (oder deswegen?) das Interesse der Schülerinnen und Schüler. Ziel ist es, tragfähige und dauerhafte stochastische Grundvorstellungen zu entwickeln.

- Zu Beginn werden die Erwartungen der Lernenden festgehalten und diskutiert.
- Die selbst gestalteten, bewusst beobachteten und sorgfältig ausgewerteten Experimente führen zu neuen Erkenntnissen.
- Erst dann werden (mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung) Prognosen für Versuchsausgänge begründet.
- Schließlich werden diese Prognosen mit den Versuchsergebnissen und den ursprünglichen Erwartungen verglichen.

Wichtig dabei ist der Wechsel zwischen Einzelarbeit, Gruppenarbeit und Klassengespräch. Die Lernenden erleben so das Spannungsfeld zwischen eigenen Experimenten, eigener und gemeinsamer Reflexion und schließlich gemeinsamer mathematischer Modellbildung.

1. Aushandeln eines Erwartungsmusters

Zunächst überlegt sich jede Schülerin und jeder Schüler, wie sich wohl bei diesem Verfahren die (z. B.) 30 Klassenarbeiten der Klasse auf die einzelnen Noten verteilen würden. Dann erhalten sie den Auftrag, sich jeweils mit der Nachbarin bzw. dem Nachbarn auf eine gemeinsame Schätzung zu einigen.

Die Meinungen der Gruppen werden in einer Tabelle an der Tafel und auf dem Arbeitsblatt (oben rechts) zusammengetragen. Aus der Diskussion über die unterschiedlichen Einschätzungen in der Klasse kristallisiert sich ein „gemeinsam erwarteter Notenspiegel“ heraus, der von der Mehrheit der Klasse mitgetragen wird.

Wichtig dabei ist, dass hier nichts berechnet wird, sondern dass allein durch Argumente ausgehandelt und abgestimmt wird. – Die letzte Zeile bereitet schließlich die Grundidee vor, dass hier eine „Gesamtmasse“ 1 (100%) an „Wahrscheinlichkeit“ (als zu erwartende relative Häufigkeit) auf die einzelnen Noten zu verteilen ist.

2. Die experimentelle Phase

Jeweils zu zweit wird nun Lehrer Lämpels Notengebung simuliert: Arbeitsteilig werden die vier Münzen geworfen und zu jedem Wurf Wappen (W) und Zahl (Z) auf dem Arbeitsblatt notiert (Tabelle unten links).

Jede Gruppe erstellt anschließend einen Notenspiegel ihrer „Klassenarbeiten“: Wie viele Einsen, Zweien, Dreien, Vieren, Fünfen gab es?

3. Diskussion der Ergebnisse und eine erste Prognose

Die Ergebnisse der Gruppen werden an der Tafel und auf dem Arbeitsblatt (unten rechts) zusammengetragen und daraus dann ein „Gesamtnotenspiegel“ ermittelt (erst jetzt wird gerechnet), der die Prozent-Anteile der verschiedenen Noten enthält (vorletzte Zeile).

Zum Schluss ein sehr wichtiger Schritt, der die letzte Zeile der Tabelle unten rechts liefert: Aus dem Gesamt-Notenspiegel (der bereits „Ausreißer“ bei Einzelergebnissen für alle erkennbar „weggemittelt“ hat) wird eine Prognose für die nächste Klassenarbeit gewagt.

Wesentlich dabei ist, dass spätestens jetzt die „theoretische“ Symmetrie für die beiden Notenpaare 1 und 5, 2 und 4 erkannt wird (Gedankenexperiment: Münzwurf auf einem Glastisch, von oben und zugleich von unten betrachtet) und dann daraus (mathematische Modellbildung!) auf eine sinnvollerweise symmetrische Prognose geschlossen wird:

Die Vorhersage wird „besser“, wenn die (meist leicht unterschiedlichen) Werte für 1 und 5 ausgeglichen werden und für beide Noten dieselbe Prognose (arithmetisches Mittel) gegeben wird (spätestens hier runden wir auf ganze Prozent). Für die Noten 2 und 4 wird dann genauso verfahren, für die Note 3 bleibt die (ggf. gerundete) relative Häufigkeit.

Damit wird die Wahrscheinlichkeit als bestmögliche Prognose vorbereitet und zugleich verhindert, dass Wahrscheinlichkeit entweder allein mit relativer Häufigkeit gleichgesetzt wird oder allein mit Symmetrie-Überlegungen in Verbindung gebracht wird. Dieser Schluss ist wertvoll, trägt weit über dieses Beispiel hinaus und verdient entsprechend Zeit und Beachtung!

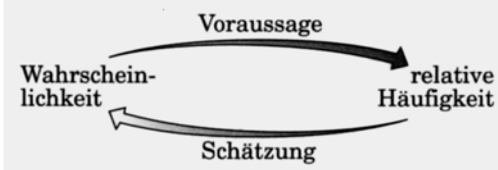

Abb. 1: Wechselspiel zwischen Wahrscheinlichkeit und relativen Häufigkeiten

Die Darstellung des „eigenen“ Notenspiegels und des „Gesamt-Notenspiegels“ jeweils als Histogramm bietet sich als Hausaufgabe an.

4. Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Erst jetzt schließt sich „endlich“ die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Dies kann und sollte wenigstens auf zwei verschiedenen Wegen geschehen:

- Zum einen über eine systematische vollständige Aufzählung eines geeigneten Ergebnisraums (**Abb. 1**),
- zum anderen über ein Baumdiagramm (**Abb. 2**).

Beides sind einfache, fast universelle Hilfsmittel und die bewusste Gegenüberstellung verschiedener Lösungswege öffnet unterschiedliche Blickwinkel auf die Situation, spricht die unterschiedlichen Lerntypen an und trägt so zu einem breiteren Verständnis bei.

W	W	W	W	→ 1 Fall „4-mal Wappen“
W	W	W	Z	
W	W	Z	W	
W	Z	W	W	→ 4 Fälle „3-mal Wappen“
Z	W	W	W	
W	W	Z	Z	
W	Z	W	Z	
Z	W	W	Z	
W	Z	Z	W	→ 6 Fälle „2-mal Wappen“
Z	W	Z	W	
Z	Z	W	W	
Z	Z	Z	W	
Z	Z	W	Z	
Z	W	Z	Z	→ 4 Fälle „1-mal Wappen“
W	Z	Z	Z	
Z	Z	Z	Z	→ 1 Fall „0-mal Wappen“

Abb. 1: Aufzählung von Elementarereignissen (W = Wappen, Z = Zahl)

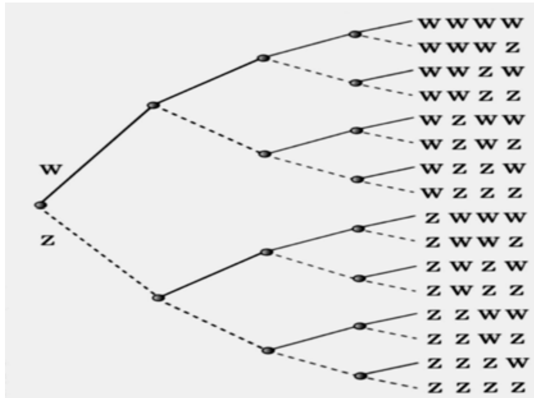

Abb. 2: Der Baum der Elementarereignisse

Sowohl die Liste in **Abb. 1** als auch der Baum in **Abb. 2** enthalten lauter gleichberechtigte Fälle („Elementarereignisse“), die damit sinnvollerweise als gleichwahrscheinlich anzunehmen sind. Daraus ergibt sich dann über die hier interessierenden zusammengesetzten Ereignisse (Anzahl Wappen) die gesuchte Modell-Wahrscheinlichkeitsverteilung (**Abb. 3**).

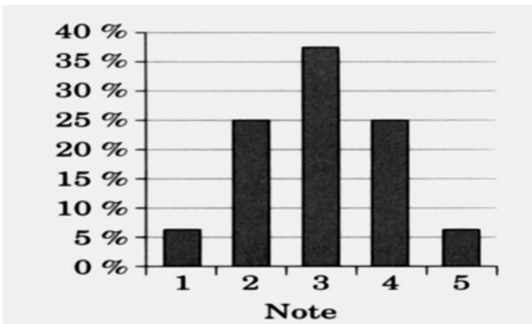

Abb. 3: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Nach *Herget, Wilfried:* Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall ...
In: *mathematik lehren*, Heft 85 (1997), S. 4–8.

Siehe auch: *Herget, Wilfried* (Hrsg.): Wege in die Stochastik.
Sammelband *mathematik lehren*. – Friedrich Verlag, Seelze 2008, 136 Seiten.