

Reißnägel werfen

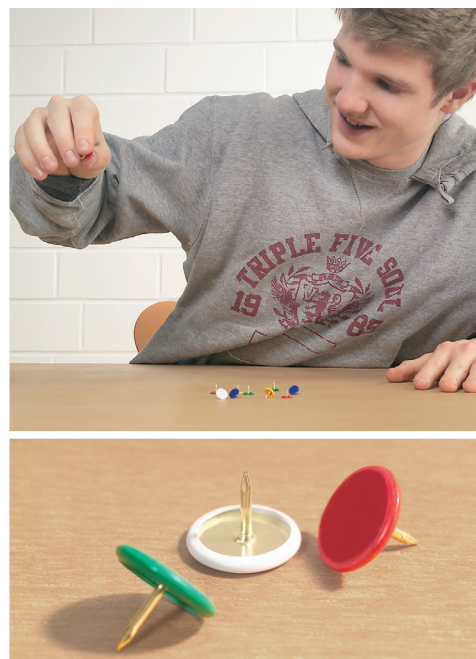
Die Klasse 7a will wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim Reißnägeln fallen lassen die Nadel nach oben zeigt. Dazu lässt jeder Schüler/jede Schülerin der Klasse einen Reißnagel 100-mal fallen und notiert in einer Strichliste die Anzahl des Ergebnisses .

Anzahlen beim 100-maligen Reißnagelwerfen in der Klasse 7a.

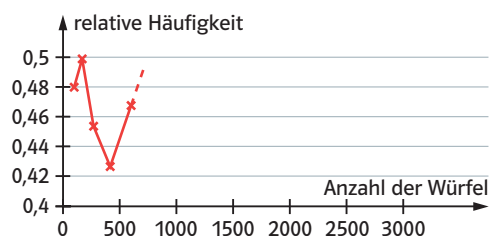
Name	
Erwin	48
Inga	51
Aishe	37
Olga	35
Fred	61
Irmgard	46
Theo	62
Izmir	50
Abdul	39
Gerda	48
Thorsten	57
Klaus	56
Silke	42
Anke	45
Julia	31
Heike	37
Katrin	59
Paul	42
Lilli	30
Hannah	40
Stefan	52
Tim	35
Christoph	60
Manfred	43
Jochen	38
Helmut	49
Lydia	55
Tanner	37
Max	41
Nina	45
Alena	52

Auswertung der 7a				
Zahl der Würfe	100	100	100	100
Zahl der 	48	51	37	35
Summe der Würfe	100	200	300	400
Summe der 	48	99	136	?
relative Häufigkeit	48 %	49,5 %	45,3 %	?

- 1 a)  Führt den Versuch in eurer Klasse durch oder verwendet die nebenstehende Tabelle der 7a zur Auswertung.
- b)  Sammelt eure Daten in einer Tabelle und berechnet die relativen Häufigkeiten für die Summe der Würfe.
- c) Welche größte und kleinste Anzahl gibt es? Wie kann man aus diesen Daten die Wahrscheinlichkeiten für  schätzen?
- d)  Untersuche die relative Häufigkeit für das Ergebnis  in den ersten 1000 Würfeln, in den Würfeln von 1100 bis 2000, in den Würfeln über 2000. Um wie viel Prozent schwankt die relative Häufigkeit jeweils?
- e)  Formuliere einen Satz zur relativen Häufigkeit:
„Je höher die Anzahl der Versuche ...“.
- f) Was würdest du antworten, wenn dich jemand fragt, wie wahrscheinlich es ist,  zu werfen?
- g) Ist die Schätzung sicher?



- 2  Die Entwicklung der relativen Häufigkeit für  lässt sich auch gut grafisch mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms darstellen.



- 3  Einige Schüler der 7a haben erste Schätzungen für die Wahrscheinlichkeit beim Reißnagelwerfen angegeben. Diskutiert die Schätzungen.

Reißnagel		
Inga	50 %	50 %
Theo	40 %	60 %
Tim	35 %	75 %

Schätzen von Wahrscheinlichkeiten



100 Würfe	Anzahl der 2
1	35
2	29
3	30
4	21
5	18
6	21
7	30
8	25
9	33
10	33
11	17
12	34
13	32
14	22
15	29
16	37
17	34
18	31
19	35
20	27
21	20
22	31
23	29
24	19
25	25
26	31
27	21
28	23
29	18
30	29
31	35
32	19
33	32
34	21
35	34
36	33
37	31
38	23
39	30
40	18



Hier siehst du Zufallsgeräte, für deren Ergebnisse beim Werfen nicht sofort Wahrscheinlichkeiten angebar sind. Suche zwei Zufallsgeräte aus, schätze die Wahrscheinlichkeiten und begründe deine Schätzung.

Die **relative Häufigkeit**, mit der ein bestimmtes Ergebnis eines Zufallsversuchs beobachtet wird, schwankt mit zunehmender Anzahl der Versuche immer weniger. Die Zahl, bei der sich die relativen Häufigkeiten einpendeln, nennt man die **(statistische) Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses. Wenn man einen Versuch häufig ausführt, erhält man einen geeigneten Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.

1 Für das Werfen des Würfels links oben soll die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 2 bestimmt werden.

- a) Schätze die Wahrscheinlichkeit aus den Daten links. Gehe vor wie auf der vorherigen Seite beschrieben.
b) [!] Schätzt man die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 2 auf 27%, so lassen sich auf Grund der Würfelsymmetrie auch die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Zahlenergebnisse schätzen.

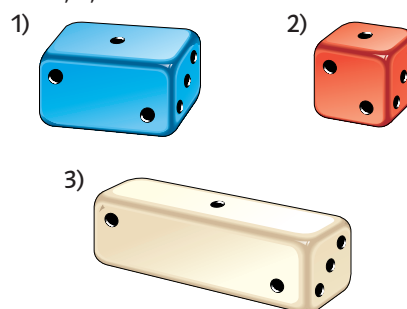
2 Entscheide für die folgenden Aussagen, ob es sich um die Wahrscheinlichkeit oder um die absolute bzw. relative Häufigkeit handelt.

- a) In einer Gesamtschule fehlen am ersten Schultag 31 Kinder.
b) Die Fehlerquote bei einem Vokabeltest liegt bei 8,3%.
c) 17% aller Jugendlichen leiden unter Karies.
d) In einer Lostrommel befinden sich 220 Nieten.
e) Die Gewinnchance bei einer Lotterie beträgt 42%.
f) Jeder 6. Mensch ist ein Chinese.

3 Bei 5000 Würfen erscheint die Augenzahl 1 beim Würfeln

- 1) 1010-mal 2) 820-mal 3) 1190-mal.

- a) Schätze die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 1.
b) Gegenüber der 1 liegt beim Würfel die 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 6 bei den drei Würfeln?
c) [!] Gegenüberliegende Augenzahlen beim 6er-Würfel addieren sich immer zu sieben. Schätze die Wahrscheinlichkeit für die 2; 3; 4 und 5 für die drei Würfel.



4 [!] Die im Kasten beschriebene Eigenschaft der relativen Häufigkeit wird auch das „Gesetz der großen Zahlen“ genannt. Erläutere warum.

Übrigens

Bei einem gezinkten Würfel wäre z. B. der Punkt für die 1 auf-gebohrt und mit Zink gefüllt. Dadurch wird die Würfelseite schwerer und die 6 kommt häufiger.

5 Klaus spielt mit seiner Schwester Silke *Mensch-ärgere-dich-nicht* und verliert haushoch. Da beide mit einem eigenen Würfel geworfen haben, vermutet Klaus, dass Silkes Würfel gezinkt (manipuliert) war und deshalb so häufig die 6 kam. Er prüft den Würfel in einer Testserie.

Zahl der Würfe	10	100	500	1000	5000	10 000
Zahl der Sechsen	3	10	80	190	955	1895

- Nach 10 Würfeln springt er auf und beschuldigt Silke zu mogeln. Warum wohl? Hat Klaus Recht?
- Nach 100 Würfeln will er schon aufhören. Wieso? Was rätst du?
- Schätze selbst die Wahrscheinlichkeit nach 500 Würfeln. Ist der Würfel okay?
- Nach 1000, 5000 und 10 000 Würfeln zeichnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 6 ab. Schätze sie. Ist der Würfel gezinkt?



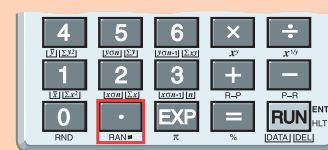
Simulation von Zufallszahlen

Viele Taschenrechner besitzen einen **Zufallsgenerator** zum Erzeugen von Zufallszahlen. Die Taste ist mit **RAN#** oder **RANDOM** beschriftet. Mit ihr werden Zufallszahlen von 0,000 bis 0,999 erzeugt.

Beispiel:

Das Werfen eines Würfels soll nachgeahmt, man sagt auch **simuliert** werden. Dazu benötigt man die natürlichen Zahlen von 1 bis 6. Um diese zu erhalten, geht man wie folgt vor.

- Multipliziere die Zufallszahl mit 6.
- Addiere 1 dazu.
- Lasse die Nachkommastellen unberücksichtigt.



Bei **Laplace-Zufallsgeräten** kennt man die Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Symmetrie. Die Zufallsgeräte kann man durch **lange Versuchsserien** testen. Daraus ergibt sich die (statistische) Wahrscheinlichkeit. Stimmen die beiden Wahrscheinlichkeitswerte in etwa überein, so ist das Zufallsgerät als Laplace-Gerät brauchbar.

Zahl	Häufigkeit
1	1340
4	2490
15	2505
16	1354
19	2510
33	1360

6 [●] Die staatliche Aufsicht prüft eine Spielbank. Beim Roulette ergeben sich bei 50 000 Versuchen die links angegebenen Häufigkeiten. Wie lautet das Prüfungsergebnis?

Tipp: Beachte die Lage der Zahlen.



7 [📊] In der Schule hast du normalerweise keinen Würfel dabei, aber deinen Taschenrechner. Damit lässt sich ein Würfel nachahmen (siehe roter Kasten).

- Berechne einige Würfelergebnisse.
- [📊] Überprüfe, ob eure Taschenrechner als Laplace-Zufallsgerät geeignet sind.
 - Notiert die Ergebnisse von 100 Simulationen.
 - Addiert eure Ergebnisse gruppenweise und tragt die Gruppensummen z. B. an der Tafel zusammen.
 - Wertet die Daten aus.
- [●] Bewerte einen Taschenrechner, der in 500 (5000) Simulationen 90-mal (900-mal) die Zahl 2 liefert.



Deutung von Wahrscheinlichkeiten



a) Bei 6 Würfeln ist eine 6 dabei.

b) Nach 6 Würfeln kommt die erste 6.

c) Nach jeweils 6 Würfeln erscheint eine 6.

d) Wenn du oft würfelst, kommt innerhalb von 6 Würfeln immer eine 6.

e) Bei 600 Würfeln ist etwa ein Sechstel mit der Augenzahl 6 dabei.

Die Wahrscheinlichkeit bei einem fairen Würfel eine 6 zu werfen beträgt $\frac{1}{6}$. Treffen die Deutungen a) bis e) immer zu? Erläutere dein Urteil. Ändere die Aussagen a) bis d) so ab, dass sie zur Wahrscheinlichkeitsangabe $\frac{1}{6}$ passen.

Wahrscheinlichkeitsaussagen sind nur in langen Versuchsserien brauchbar und zur Vorhersage von Einzelergebnissen nicht geeignet. Einzelne Versuchsergebnisse sind unabhängig voneinander.

1 Kommentiere die Aussagen von Kevin und Sahra zum Würfeln.

Kevin: „Die Wahrscheinlichkeit nach 20-mal Würfeln ohne 6 eine zu erhalten ist ziemlich groß.“

Sahra: „Die Wahrscheinlichkeit ist jedenfalls größer, als wenn du schon nach drei Würfeln ohne 6 eine erwartest.“

Würfe	Anzahl der 6en
600	114
6000	1020
12 000	2025

2 Bei 6000 Würfeln mit dem Würfel erwartet man etwa 1000-mal eine 6, da dann die relative Häufigkeit genau zur Wahrscheinlichkeit passt. Links siehst du die Ergebnisse einer Versuchsserie.

- a) Wie viele 6en erwartest du in den drei Fällen? Wie weit weicht das Ergebnis von deiner Erwartung ab?
- b) Passen die Ergebnisse trotzdem zum „Gesetz der großen Zahlen“?

3 Gib für die Aussagen einen Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit an.

a) Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu erhalten, wenn man sie braucht, ist sehr klein.

b) Die Wahrscheinlichkeit, genau im 100. Wurf eine 6 zu würfeln, ist sehr klein.

4 Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „3 Richtige im Lotto“ beim Spiel „6 aus 49“ beträgt rund 1,8%.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

a) Beurteile die folgenden Aussagen:

- Alle 56 Wochen (1 Tippschein pro Woche) gibt's 3 Richtige, da $56 \cdot 1,8\% \approx 100\%$.
 - Unter den nächsten 56 Tippscheinen gibt's 3 Richtige.
 - In einem Tipperleben (30 Jahre, wöchentlich ein Tippschein) kommen rund 28-mal 3 Richtige vor.
 - Während der nächsten 56 Ausspielungen gibt es genau / höchstens / mindestens einmal 3 Richtige.
 - Im nächsten Jahr kann dein Standardtipp 3-mal 3 Richtige liefern.
 - Unter den nächsten 1000 Ziehungen wird deine Zahlenkombination etwa 18-mal 3 Richtige liefern.
- b) Formuliere zwei falsche Aussagen in a) so um, dass sie richtig werden und (nur) zur Wahrscheinlichkeit 1,8% passen.

Der beste Weg zum Ziel



1 [Icon: 2 people] Ein Spiel zu zweit

Für das folgende Spiel brauchst du:

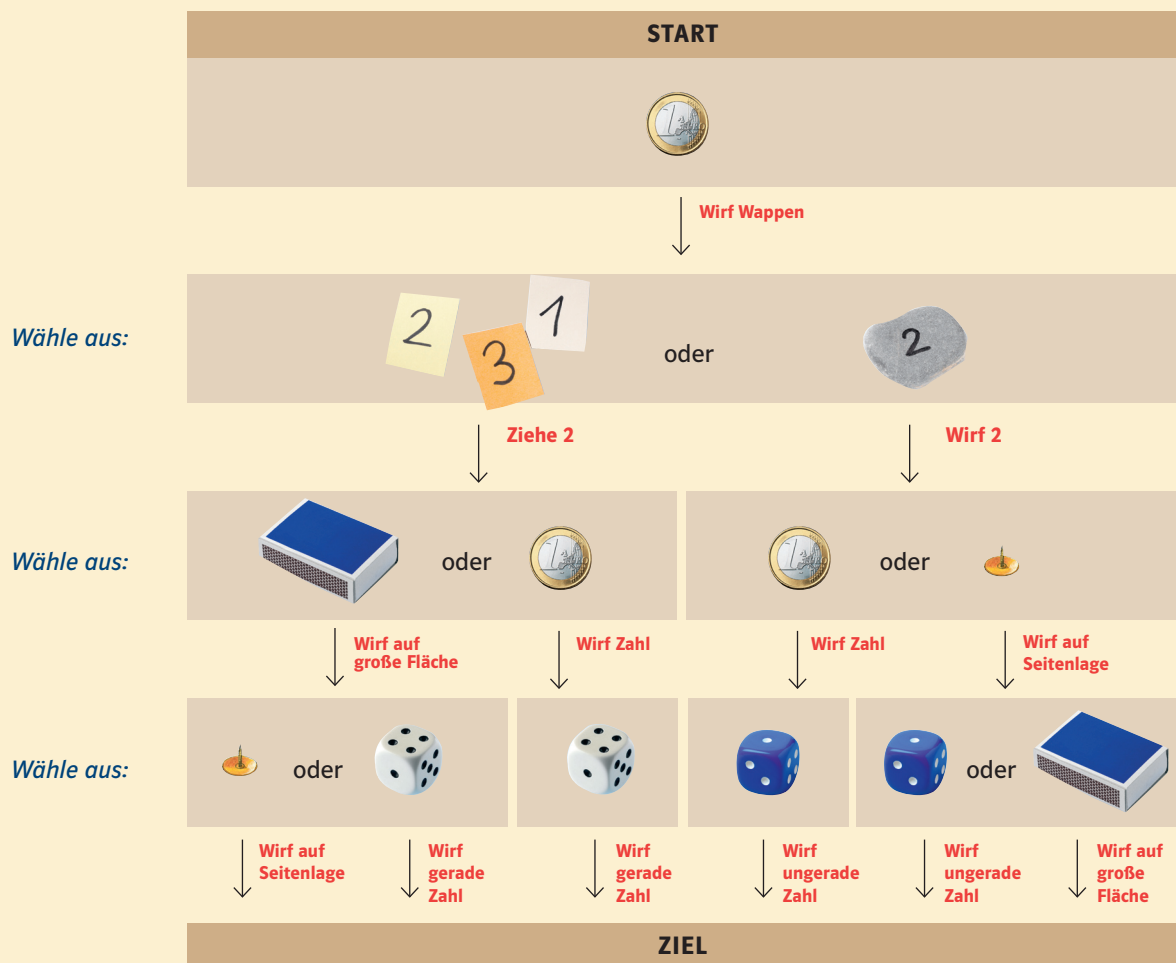
- einen normalen sechsseitigen Würfel,
- eine Münze,
- eine Reißzwecke,
- drei Lose (mit den Zahlen 1, 2 und 3),
- eine Streichholzschachtel und
- einen Stein zum Würfeln, dessen größte Seite mit 2 beschriftet ist.

Bei dem Stein gilt die Zahl als gewürfelt, die unten liegt.

Spielregel: Ein Spieler beginnt bei Start mit dem Wurf eines Geldstückes. Wird Wappen geworfen, darf zwischen den Losen oder dem Stein gewählt werden. Gelingt das nicht, darf der andere Spieler sein Glück versuchen.

So versucht ihr nun die Aufträge eures Weges nacheinander zu erfüllen. Dabei darf das einmal gewählte Zufallsgerät nicht getauscht werden.

Wer zuerst am Ziel ist, hat gewonnen. Gibt es einen „günstigsten“ Weg?





Auto oder Ziege?

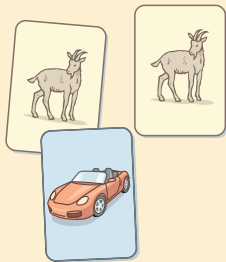


Eine Fernsehshow: Die Kandidatin hat die Endrunde erreicht und hat nun die Chance, ein Auto zu gewinnen. Das verbirgt sich hinter einer von drei Türen, hinter den anderen verbirgt sich, sozusagen als lebendige Niete, je eine Ziege. Die Kandidatin kann eine der drei Türen wählen, die Chance auf den Supergewinn beträgt also $\frac{1}{3}$. Sie entscheidet sich für eine der Türen und nennt die Nummer der Tür.

Jetzt öffnet der Showmaster eine der beiden anderen Türen. Hinter der geöffneten Tür meckert eine Ziege – klar, der Showmaster weiß ja, wo der Gewinn steckt. Nun bietet der Showmaster der Kandidatin an, die erste Entscheidung zu ändern und zur anderen noch geschlossenen Tür zu wechseln.

1 Versetze dich in ihre Rolle: Was würdest du tun? Wechseln oder bei der alten Wahl bleiben?

Sind die Chancen beim Wechseln oder nicht Wechseln gleich?



2 [888] Macht eine Simulation zur Show!

Spielt die Situation zu zweit nach. Ihr braucht dazu drei Karten, von denen eine den Hauptgewinn und die anderen zwei die Nieten darstellen sollen. Verteilt die Rollen der Kandidatin und des Showmasters, nach 10 Spielen werden die Rollen getauscht. Der Showmaster legt die Karten verdeckt vor die Kandidatin und merkt sich, wo der Gewinn liegt. Die Kandidatin wählt eine der Karten aus. Jetzt deckt der Showmaster eine andere Karte auf, hinter der sich eine Niete verbirgt.

Teilt die Gruppen in zwei Hälften auf. Die eine Hälfte spielt Variante A, die andere Variante B.

Variante A

Die Kandidatin bleibt bei ihrer Erstwahl (wichtig: Wirklich immer dabei bleiben!). Notiert die Anzahl der Gewinne und der Nieten. Überlegt nach dem Spiel, welche Wahrscheinlichkeit ihr für Gewinn bei der Nicht-Wechseln-Strategie vermutet. Habt ihr eine logische Begründung?

Variante B

Die Kandidatin wechselt ihre Erstwahl (wichtig: Wirklich immer wechseln!). Notiert die Anzahl der Gewinne und der Nieten. Überlegt nach dem Spiel, welche Wahrscheinlichkeit ihr für Gewinn bei der Wechseln-Strategie vermutet. Habt ihr eine logische Begründung?

3 Tragt eure Ergebnisse in der Klasse zusammen und berechnet jeweils die relativen Häufigkeiten für Gewinn beim Wechseln und beim Nichtwechseln. Was empfehlst du nach der Simulation der Kandidatin?



Zufallsversuch

Mithilfe von **Zufallsgeräten** wie Glücksrädern, Würfeln, Losen usw. werden Zufallsversuche durchgeführt. Das Ergebnis eines Zufallsversuchs ist zufällig und nicht vorhersagbar.

Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses

Haben alle **möglichen Ergebnisse** eines Zufallsversuchs die gleiche Chance, so gibt der Bruch $\frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$ die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses an.

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Führen mehrere gleich wahrscheinliche Ergebnisse eines Zufallsversuchs zum Ziel, so nennt man diese Ergebnisse **günstig**.

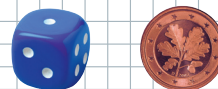
Der Bruch $\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ stellt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses dar.

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

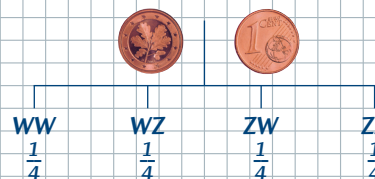
Sind die Ergebnisse eines Zufallsversuchs nicht gleich wahrscheinlich, so muss die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses geschätzt werden. Dazu führt man den Versuch möglichst oft durch und berechnet die **relative Häufigkeit**. Diese stabilisiert sich nach vielen Versuchen bei einer Zahl, der **statistischen Wahrscheinlichkeit**.

Deutungen von Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsangaben sind zur Vorhersage von Einzelergebnissen nicht geeignet. Nur in langen Versuchsserien ist eine Wahrscheinlichkeitsaussage brauchbar.



Der Münzwurf hat zwei mögliche Ergebnisse mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.



Das Ereignis „mindestens ein Wappen“ hat die drei günstigen Ergebnisse (WW), (WZ) und (ZW) und somit die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$.

Die Ergebnisse sind



gleich
wahrscheinlich



nicht gleich
wahrscheinlich

Würfanzahl	Zahl der Einsen	relative Häufigkeit
100	37	37,0 %
500	141	28,2 %
1500	462	30,8 %
5000	1485	29,7 %

Die Wahrscheinlichkeit für eine 1 beträgt rund 30 %. Nach 500 Würfeln lässt sich die Wahrscheinlichkeit auf etwa 28 % schätzen.

Richtig: In 1000 Würfeln bekomme ich mit einem fairen Würfel in rund $\frac{1}{6}$ der Fälle eine 6.

Falsch: In 6 Würfeln ist eine 6 dabei.

[einfach]

1 Ein Glücksrad besteht aus 10 gleich großen Feldern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger auf Rot stehen bleibt, wenn

- a) 3 Felder rot gefärbt sind?
b) 8 Felder rot gefärbt sind?

2 In einer Lostrommel befinden sich 500 Lose. Darunter sind 50 Hauptgewinne und 20% Trostpreise. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, etwas zu gewinnen.

3 Eine Münze als Zufallsgerät ist verloren gegangen. Überlege einen Ersatz auf zwei Arten. Du hast einen Würfel, ein Kartenspiel und einen Zettelbock mit Stift zur Verfügung.

4 Die Tabelle gibt die Anzahl der 6en bei einem „schiefen“ Würfel an.

Anzahl	200	500	1000	2000
Häufigkeit	56	115	242	503

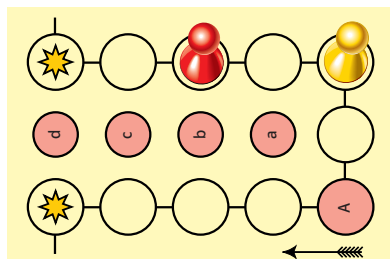
- a) Berechne die relativen Häufigkeiten in Prozent.
b) Schätze die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer 6.

5 Welche der folgenden Deutungen ist für einen 6er-Würfel richtig, welche falsch?

- a) Nach 6 Würfeln kommt eine 6.
b) Innerhalb von 6 Würfeln erscheint eine 6.
c) Bei 6000 Würfeln ist rund 1000-mal eine 6 dabei.

[mittel]

1 Wie groß ist die Chance für Rot im nächsten Zug
a) den gelben Spielstein zu werfen?
b) nicht ins Haus zu kommen?



2 Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch (zwei gleiche Ziffern) zu werfen, ist genauso groß wie mit einem Würfel eine Sechs zu werfen. Begründe. Tipp: Für 2 Würfel gibt es 36 Ergebnisse. Zeige das.

3 Für ein Spiel benötigt man ein Zufallsgerät, das gleichwertig die Ziffern 1; 2 und 3 liefert. Überlege einen Ersatz auf zwei Arten. Du hast Münzen, einen Würfel und ein Kartenspiel zur Verfügung.

4 Können die Häufigkeiten zu einem Zufallsversuch passen?

Anzahl	200	500	1200	2000
Häufigkeit	56	115	424	504

Mache, falls nötig, einen passenden Korrekturvorschlag.

5 Welche der folgenden Deutungen ist für einen 6er-Würfel richtig, welche falsch?

- a) Bei 6 Würfeln ist eine 6 dabei.
b) Bei 100 Würfeln gibt es 16- bis 17-mal eine 6.
c) Korrigiere falsche Aussagen so, dass sie richtig werden.

[schwieriger]

1 Auf einem Glücksrad sind die zwölf gleich großen Felder von 1 bis 12 nummeriert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl oder eine durch 3 teilbare Zahl zu erhalten?

2 Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel beträgt $\frac{1}{6}$, einer weißen $\frac{2}{9}$, einer gelben $\frac{1}{3}$ und einer blauen $\frac{5}{18}$. Wie viele Kugeln jeder Farbe müssen sich mindestens im Gefäß befinden?

3 Ein 6er-Würfel als Zufallsgerät ist verloren gegangen. Überlege einen Ersatz auf zwei Arten. Du hast Münzen, ein Kartenspiel und einen Zettelbock mit Stift zur Verfügung.

4 Beim Werfen eines Reißnagels erscheint die Schräglage mit der Wahrscheinlichkeit 57%. Notiere mögliche Häufigkeiten zu 200; 500; 1000 und 2000 Versuchen.

5 Beim Würfeln gibt es folgende Anzahl 6en.

Würfe	600	6000	12 000
6en	84	970	2040

- a) Passen die relativen Häufigkeiten zum Gesetz der großen Zahl?
b) Berechne die Abweichungen zu deinen erwarteten Anzahlen.